# Кинетическая энергия

**Кинетическая энергия точки и системы.** *Кинетической энергией материальной точки называют половину произведения массы точки на квадрат ее скорости*, т. е. $mv^2/2$ или $m\bar{v}^2/2$, так как скалярный квадрат любого вектора равен квадрату модуля этого вектора. Кинетическая энергия является скалярной положительной величиной. В СИ единицей кинетической энергии является джоуль: 1 Дж = 1 Н·м.

*Кинетической энергией системы $T$ называют сумму кинетических энергий всех точек механической системы*, т. е.



$$T=\sum\frac{m_k v_k^2}{2}=\sum\frac{m_k\bar{v}_k^2}{2}. \tag{61}$$

Кинетическая энергия как точки, так и системы не зависит от направления скоростей точек. Кинетическая энергия может быть равна нулю для системы только при условии, если все точки системы находятся в покое.

**Вычисление кинетической энергии системы (теорема Кёнига).** Разложим движение механической системы на переносное поступательное вместе с центром масс системы и относительное по отношению к системе координат, движущейся поступательно вместе с центром масс. Аналогично тому, как это производилось при выводе формулы для кинетического момента при таком разложении абсолютного движения, для каждой точки системы $M_k$ (см. рис. 57) имеем

$$\bar{\rho}_k=\bar{\rho}_C+\bar{r}_k$$

и соответственно

$$\bar{v}_k=\bar{v}_C+\bar{v}_{kr},$$

где $\bar{v}_{kr}=\mathrm{d}\bar{r}/\mathrm{d}t$ является относительной скоростью точки, так как подвижная система координат движется поступательно ($\bar{\omega}=0$) и, следовательно, полная производная по времени от $\bar{r}_k$ совпадает с локальной производной, равной относительной скорости точки.

Подставляя значение скорости $\bar{v}_k$ в выражение кинетической энергии абсолютного движения системы, т. е. ее движения относительно системы координат $Ox_1y_1z_1$, после очевидных преобразований получаем

$$T=\sum\frac{m_k\bar{v}_k^2}{2}=\frac{\bar{v}_C^2}{2}\sum m_k+\sum\frac{m_k\bar{v}_{kr}^2}{2}+\bar{v}_C\sum m_k\bar{v}_{kr}. \tag{62}$$

Но

$$\bar{v}_C\sum m_k\bar{v}_{kr}=\bar{v}_C\sum m_k\frac{\mathrm{d}\bar{r}_k}{\mathrm{d}t}=\bar{v}_C\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum m_k\bar{r}_k\right)=0,$$

так как

$$\sum m_k\bar{r}_k=\overrightarrow{\mathrm{const}}=0.$$

Учитывая, что $\sum m_k=M$ — масса системы, и обозначая $T_C^{(r)}$ второе слагаемое в (62), имеем

$$T=\frac{Mv_C^2}{2}+T_C^{(r)}, \tag{63}$$

где

$$T_C^{(r)}=\sum\frac{m_kv_{kr}^2}{2}.$$

Величина $T_C^{(r)}$ является кинетической энергией относительного движения системы относительно системы координат, движущейся поступательно вместе с ее центром масс, или кинетической энергией системы относительно центра масс.



Формула (63) выражает так называемую теорему Кёнига: *кинетическая энергия системы в абсолютном движении складывается из кинетической энергии центра масс, если в нем сосредоточить всю массу системы, и кинетической энергии системы относительно центра масс.*

**Кинетическая энергия твердого тела.** При поступательном движении твердого тела кинетическая энергия

$$T=\sum\frac{m_kv_k^2}{2}=\frac{v^2}{2}\sum m_k=M\frac{v^2}{2}, \tag{64}$$

так как при поступательном движении твердого тела скорости всех точек тела одинаковы, т. е. $\bar{v}_k=\bar{v}$, где $\bar{v}$ — общая скорость для всех точек тела.

Таким образом, кинетическая энергия твердого тела при поступательном движении вычисляется так же, как и для одной точки, у которой масса равна массе всего тела.

При вращении тела вокруг неподвижной оси кинетическую энергию можно вычислить, если учесть, что скорость какой-либо точки тела $M_k$ можно выразить (см. рис. 50) как

$$v_k=\omega h_k,$$

где $h_k$ — кратчайшее расстояние от точки $M_k$ до оси вращения; $\omega$ — угловая скорость тела.

Тогда

$$T=\sum\frac{m_kv_k^2}{2}=\frac{\omega^2}{2}\sum m_kh_k^2=\frac{\omega^2}{2}J_z$$

или

$$T=J_z\frac{\omega^2}{2}, \tag{65}$$

где $J_z$ — момент инерции тела относительно оси вращения $Oz$.

Следовательно, *кинетическая энергия тела при вращательном движении вокруг неподвижной оси равна половине произведения момента инерции тела относительно оси вращения на квадрат угловой скорости тела.*

Из сравнения (64) и (65) следует, что эти формулы подобны, только при вращательном движении аналогом массы является момент инерции тела относительно оси вращения, а скорости — угловая скорость тела. Такая аналогия между поступательным и вращательным движениями твердого тела может наблюдаться во многих формулах, относящихся к этим двум движениям.

При плоском движении твердого тела кинетическую энергию можно вычислить по теореме Кёнига. Так как в этом случае относительное движение относительно центра масс (точнее, относительно системы координат, движущейся



поступательно вместе с центром масс) является вращением вокруг центра масс с угловой скоростью $\omega$, то

$$T_C^{(r)}=J_{Cz}\frac{\omega^2}{2},$$

где $J_{Cz}$ — момент инерции тела относительно оси $Cz$, проходящей через центр масс тела перпендикулярно плоскости движения. Следовательно, на основании (63) для плоского движения тела имеем

$$T=\frac{Mv_C^2}{2}+J_{Cz}\frac{\omega^2}{2}. \tag{66}$$

Таким образом, *при плоском движении тела кинетическая энергия складывается из кинетической энергии поступательного движения тела вместе с центром масс и кинетической энергии от вращения вокруг оси, проходящей через центр масс и перпендикулярной плоскости движения.*

Учитывая, что $v_C=\omega\cdot CP$ ($P$ — мгновенный центр скоростей), из (66), используя теорему Штейнера, получаем еще одну формулу для кинетической энергии твердого тела при плоском движении:

$$T=M\frac{v_C^2}{2}+J_{Cz}\frac{\omega^2}{2}=\frac{\omega^2}{2}\left[J_{Cz}+M(CP)^2\right]=J_{Pz}\frac{\omega^2}{2}, \tag{66'}$$

где $J_{Pz}$ — момент инерции тела относительно оси $Pz$, проходящей через мгновенный центр скоростей перпендикулярно плоскости движения,

Если механическая система состоит из нескольких твердых тел, то следует вычислить кинетическую энергию каждого тела, а затем полученные кинетические энергии сложить. Так определяется кинетическая энергия системы тел.

## Теорема об изменении кинетической энергии точки

Для материальной точки массой $m$, движущейся под действием силы $\bar{F}$, основной закон динамики можно представить в виде

$$m\frac{\mathrm{d}\bar{v}}{\mathrm{d}t}=\bar{F}.$$

Умножая обе части этого соотношения скалярно на дифференциал радиуса-вектора точки $\mathrm{d}\bar{r}$, имеем

$$m\mathrm{d}\bar{v}\cdot\frac{\mathrm{d}\bar{r}}{\mathrm{d}t}=\bar{F}\cdot\mathrm{d}\bar{r}$$

или

$$m\bar{v}\cdot\mathrm{d}\bar{v}=\bar{F}\cdot\mathrm{d}\bar{r},$$

где $\bar{v}=\mathrm{d}\bar{r}/\mathrm{d}t$ — скорость точки.



Учитывая, что $\mathrm{d}A=F\cdot\mathrm{d}\bar{r}$ — элементарная работа, получаем

$$m\bar{v}\cdot\mathrm{d}\bar{v}=\mathrm{d}A.$$

Так как

$$m\bar{v}\cdot\mathrm{d}\bar{v}=\mathrm{d}(m\bar{v}^2/2)=\mathrm{d}(mv^2/2),$$

то окончательно

$$\mathrm{d}(mv^2/2)=\mathrm{d}A. \tag{67}$$

Формула (67) выражает теорему об изменении кинетической энергии для точки в дифференциальной форме: *дифференциал кинетической энергии точки равен элементарной работе силы, действующей на точку.*

Если обе части (67) разделить на $\mathrm{d}t$ и учесть, что $\mathrm{d}A/\mathrm{d}t=W$ — мощность, то теорему можно также выразить в виде

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{mv^2}{2}\right)=W. \tag{67'}$$

*Производная по времени от кинетической энергии точки равна мощности, подводимой к этой точке.*

Интегрируя обе части (67) от точки $M_0$ до точки $M$ (см. рис. 60), получаем теорему об изменении кинетической энергии точки в конечной форме:

$$\frac{mv^2}{2}-\frac{mv_0^2}{2}=A, \tag{68}$$

т. е. *изменение кинетической энергии точки на каком-либо перемещении равно работе силы, действующей на точку на том же перемещении.*

## Теорема об изменении кинетической энергии системы

Приложив к точкам системы все внешние и внутренние силы, для каждой точки системы можно выразить теорему об изменении кинетической энергии (67) в форме

$$\mathrm{d}(m_kv_k^2/2)=\bar{F}_k^{(e)}\cdot\mathrm{d}\bar{r}_k+\bar{F}_k^{(i)}\cdot\mathrm{d}\bar{r}_k,\quad k=1,\ 2,\ \ldots,\ N.$$



Суммируя правые и левые части этих соотношений по всем точкам системы и вынося знак дифференциала за знак суммы, получаем

$$\mathrm{d}\sum\frac{m_kv_k^2}{2}=\sum\bar{F}_k^{(e)}\cdot\mathrm{d}\bar{r}_k+\sum\bar{F}_k^{(i)}\cdot\mathrm{d}\bar{r}_k,$$

или

$$\mathrm{d}T=\sum\mathrm{d}A_k^{(e)}+\sum\mathrm{d}A_k^{(i)}, \tag{69}$$

где кинетическая энергия системы

$$T=\sum\frac{m_kv_k^2}{2};$$

элементарная работа внешних и внутренних сил соответственно будет

$$\mathrm{d}A_k^{(e)}=\bar{F}_k^{(e)}\cdot\mathrm{d}\bar{r}_k,\quad \mathrm{d}A_k^{(i)}=\bar{F}_k^{(i)}\cdot\mathrm{d}\bar{r}_k.$$

Формула (69) и выражает теорему об изменении кинетической энергии системы в дифференциальной форме: *дифференциал от кинетической энергии системы равен сумме элементарных работ всех внешних и внутренних сил, действующих на систему.*

Если обе части (69) проинтегрировать между двумя положениями системы — начальным и конечным, в которых соответственно кинетическая энергия $T_0$ и $T$, то, изменяя порядок суммирования и интегрирования, имеем

$$T-T_0=\sum\int_{M_{k0}}^{M_k}\mathrm{d}A_k^{(e)}+\sum\int_{M_{k0}}^{M_k}\mathrm{d}A_k^{(i)},$$

или

$$T-T_0=\sum A_k^{(e)}+\sum A_k^{(i)}, \tag{70}$$

где $A_k^{(e)}=\int_{M_{k0}}^{M_k}\mathrm{d}A_k^{(e)}$ — работа внешней силы для точки системы $M_k$ при ее перемещении из начального положения $M_{k0}$ в конечное положение $M_k$; $A_k^{(i)}=\int_{M_{k0}}^{M_k}\mathrm{d}A_k^{(i)}$ — соответственно работа внутренней силы, действующей на точку $M_k$.

Формула (70) выражает теорему об изменении кинетической энергии системы в конечной или интегральной форме: *изменение кинетической энергии системы при ее перемещении из одного положения в другое равно сумме работ всех внешних и внутренних сил, действующих на систему, на соответствующих перемещениях точек системы при том же перемещении системы.*

Частный случай. Для абсолютно твердого тела сумма работ всех внутренних сил системы равна нулю:

$$\sum A_k^{(i)}=0.$$

Следовательно, теорему об изменении кинетической энергии, например, в конечной форме можно представить в виде



$$T-T_0=\sum A_k^{(e)}. \tag{71}$$

*Изменение кинетической энергии твердого тела при каком-либо перемещении равно сумме работ всех внешних сил, действующих на тело, на соответствующих перемещениях точек тела при том же перемещении твердого тела.*

Таким образом, в отличие от рассмотренных других общих теорем динамики системы в теорему об изменении кинетической энергии могут входить внутренние силы. Они не входят в эту теорему в случае абсолютно твердого тела.

## Теорема об изменении кинетической энергии в относительном движении

**Теорема об изменении кинетической энергии материальной точки.** Пусть точка $M$ совершает переносное движение вместе с подвижной системой координат $Oxyz$ относительно основной системы координат $O_1x_1y_1z_1$ и относительное движение по отношению к системе координат $Oxyz$ (рис. 71). Абсолютным движением точки $M$ является ее сложное движение



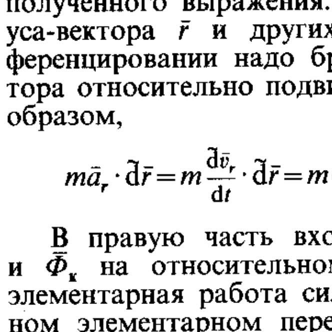


Рис. 71

относительно системы координат $O_1x_1y_1z_1$. Дифференциальное уравнение относительного движения точки $M$ в векторной форме можно представить в виде

$$m\bar{a}_r=\bar{F}+\bar{\Phi}_e+\bar{\Phi}_\text{к}, \tag{72}$$

где $\bar{\Phi}_e=-m\bar{a}_e$ — сила инерции переносного движения точки; $\bar{\Phi}_\text{к}=-2m(\bar{\omega}\times\bar{v}_r)$ — сила инерции Кориолиса.

Вывод теоремы об изменении кинетической энергии для точки в относительном движении произведем так же, как и вывод аналогичной теоремы в абсолютном движении, умножив обе части (72) скалярно на вектор элементарного относительного перемещения $\tilde{\mathrm{d}}\bar{r}$, и преобразуем левую часть полученного выражения. Значок $\sim$ над дифференциалом радиуса-вектора $\bar{r}$ и других векторов указывает, что при дифференцировании надо брать изменение соответствующего вектора относительно подвижной системы координат $Oxyz$. Таким образом,

$$m\bar{a}_r\cdot\tilde{\mathrm{d}}\bar{r}=m\frac{\tilde{\mathrm{d}}\bar{v}_r}{\mathrm{d}t}\cdot\tilde{\mathrm{d}}\bar{r}=m\tilde{\mathrm{d}}\bar{v}_r\cdot\frac{\tilde{\mathrm{d}}\bar{r}}{\mathrm{d}t}=m\tilde{\mathrm{d}}\bar{v}_r\cdot\bar{v}_r=\tilde{\mathrm{d}}\left(\frac{m\bar{v}_r^2}{2}\right)=\mathrm{d}\left(\frac{mv_r^2}{2}\right).$$

В правую часть входят элементарные работы сил $\bar{F}$, $\bar{\Phi}_e$ и $\bar{\Phi}_\text{к}$ на относительном перемещении $\tilde{\mathrm{d}}\bar{r}$. Оказывается, что элементарная работа силы инерции Кориолиса на относительном элементарном перемещении всегда равна нулю, так как эта сила перпендикулярна относительной скорости $\bar{v}_r$ и, следовательно, перпендикулярна относительному перемещению $\tilde{\mathrm{d}}\bar{r}=\bar{v}_r\mathrm{d}t$. В выражение силы инерции Кориолиса входит векторное произведение $\bar{\omega}\times\bar{v}_r$, а оно всегда перпендикулярно каждому из векторов сомножителей, в частности $\bar{v}_r$.

Итак, теорема об изменении кинетической энергии точки в дифференциальной форме имеет вид

$$\mathrm{d}(mv_r^2/2)=\bar{F}\cdot\tilde{\mathrm{d}}\bar{r}+\bar{\Phi}_e\cdot\tilde{\mathrm{d}}\bar{r}. \tag{73}$$

*Теорема об изменении кинетической энергии в относительном движении точки выражается так же, как и в абсолютном движении, только к элементарной работе приложенной силы добавляют элементарную работу силы инерции переносного движения на относительном перемещении.*

**Теорема об изменении кинетической энергии системы.** Для системы рассмотрим наиболее важный случай, когда в качестве переносного движения берется поступательное движение системы вместе с центром масс и, следовательно, кинетическую энергию системы в абсолютном движении можно вычислить на основании теоремы Кёнига (63): $T=Mv_C^2/2+T_C^{(r)}$.



Теорему об изменении кинетической энергии системы для абсолютного движения (см. рис. 56) можно представить в виде

$$\mathrm{d}T=\sum\bar{F}_k^{(e)}\cdot\mathrm{d}\bar{\rho}_k+\sum\bar{F}_k^{(i)}\cdot\mathrm{d}\bar{\rho}_k. \tag{74}$$

Так как

$$\bar{\rho}_k=\bar{\rho}_C+\bar{r}_k$$

и, следовательно,

$$\mathrm{d}\bar{\rho}_k=\mathrm{d}\bar{\rho}_C+\mathrm{d}\bar{r}_k,$$

то, заменяя в (74) $\mathrm{d}\bar{\rho}_k$ и $T$ их значениями, получаем

$$\mathrm{d}\left(\frac{Mv_C^2}{2}\right)+\mathrm{d}T_C^{(r)}=\left(\sum\bar{F}_k^{(e)}\right)\cdot\mathrm{d}\bar{\rho}_C+\sum\bar{F}_k^{(e)}\cdot\mathrm{d}\bar{r}_k+$$
$$+\sum\bar{F}_k^{(i)}\cdot\mathrm{d}\bar{r}_k+\left(\sum\bar{F}_k^{(i)}\right)\cdot\mathrm{d}\bar{\rho}_C. \tag{75}$$

По свойству внутренних сил, $\sum\bar{F}_k^{(i)}=0$.

Если теорему об изменении кинетической энергии для центра масс выразить так же, как и для точки, у которой масса равна массе всей системы, и эта точка находится под действием всех внешних сил, действующих на систему, то

$$\mathrm{d}\left(\frac{Mv_C^2}{2}\right)=\left(\sum\bar{F}_k^{(e)}\right)\cdot\mathrm{d}\bar{\rho}_C.$$

Отбросив в (75) эти члены, получим следующую теорему об изменении кинетической энергии системы в относительном движении по отношению к системе координат, движущейся поступательно вместе с центром масс:

$$\mathrm{d}T_C^{(r)}=\sum\bar{F}_k^{(e)}\cdot\mathrm{d}\bar{r}_k+\sum\bar{F}_k^{(i)}\cdot\mathrm{d}\bar{r}_k. \tag{76}$$

Сравнивая (76) с (74), видим, *что теорема об изменении кинетической энергии в относительном движении системы по отношению к системе координат, движущейся поступательно вместе с центром масс системы, формулируется так же, как и для абсолютного движения системы.*